**Problema 3 – echilibrare**

**Descrierea soluției – prof. Adrian Panaete – C.N. “A.T. Laurian” Botoșani, stud. Mihai Calancea - Univ. București, stud. Adrian Budău – Univ. București**

O matrice pătratică poate fi considerată matricea costurilor pentru un graf bipartit complet cu vârfuri dreapta asociate liniilor și vârfuri stânga asociate coloanelor.

Un cuplaj perfect în acest graf poate fi definit de o permutare de .

Se poate demonstra relativ simplu o matrice este echilibrată dacă și numai dacă toate cuplajele perfecte au același cost. Astfel costul total al unei echilibrate se obține înmulțind costul oricărui cuplaj cu

Problema se reduce astfel la o problemă în care vrem să egalizăm costul tuturor cuplajelor mărind cît se poate de puțin costurile muchiilor. Cum toate costurile de cuplaje pot doar să crească deducem ca valoare cuplajelor în final va fi cel puțin valoarea M a cuplajului maxim din graful/matricea inițial/ă.

Vom arăta că se pot aduce toate cuplajele la valoarea M.

Pentru aceasta vom arata că atâta timp cât matricea nu este echilibrată vom putea găsi cel puțin o valoare din matrice care să crească fără a crește și costul cuplajului maxim. Altfel spus exista cel puțin o muchie de graf care să nu aparțină niciunui cuplaj maxim.

Demonstrația se face prin reducere la absurd. Se alege un cuplaj de cost m<M. Să presupunem că fiecare muchie aparține cel puțin unui cuplaj maxim. Vom avea astfel cuplaje maxime câte unul corespunzător fiecărei muchii din cuplajul . Formăm un multigraf bipartit obținut prin utilizarea tuturor muchilor din cele cuplaje maximale. Suma costurilor muchiilor pe acest multigraf ar fi iar multigraful este -regulat. Eliminăm cuplajul din acest multigraf. Rămâne un multigraf bipartit -regulat. Apoi aplicând în mod repetat Lema Mariajelor eliminăm succesiv din multigraf cuplaje perfecte obținând astfel multigrafuri -regulate cu din ce în ce mai mic.

Adunând costurile tuturor cuplajelor eliminate obținem o sumă de costuri cel mult egală cu din care primul este chiar cuplajul deci avem chiar un cost strict mai mic decât . Ar rezulta că acest multigraf are suma costurilor pe muchii și egală dar și strict mai mică decât valoarea . Apare contradicția din care rezultă că exista o muchie care nu aparține niciunui cuplaj maximal – ceea ce trebuia demonstrat.

Acum știm că pentru echilibrarea optimă suma matricei finale va fi unde este valoarea oricărui cuplaj de cost maxim din graful inițial. Asta rezolvă prima parte a problemei și ne mai sugerează și ce ar trebui sa facem în a doua parte a rezolvării.

Pentru a rezolva a doua parte în mod eficient trebuie să facem câteva observații importante despre o matrice echilibrată care se deduc unele din altele. Următoarele proprietăți sunt caracteristice matricelor echilibrate:

1. Diferența între oricare linii sau coloane este constantă.
2. Se pot găsi două șiruri și corespunzătoare liniilor și coloanelor pentru care .
3. În termeni de grafuri bipartite complete – toate cuplajele perfecte au același cost.

Pentru a obține o matrice echilibrată cu proprietățile cerute vom avea de îndeplinit câteva cerințe suplimentare:

1. Pentru o permutare corespunzătoare unui cuplaj perfect al matricei inițiale vom avea - pentru a ne asigura optimalitatea ( condiția .
2. Pentru orice și trebuie să avem - pentru a ne asigura că este îndeplinită condiția .

Plecăm de la o matrice care verifică doar condițiile și alegând pentru un cuplaj maxim oarecare șirurile și . Vom optimiza această soluție mutând unități de la la operație care se va aplica pâna când devine validă condiția . Astfel daca la o anumită poziție nu este îndeplinită condiția avem nevoie să creștem valoarea cu un număr de unități . Pentru asta vom crește cu și în compensație vom descrește cu . Acest procedeu va fi repetat până când matricea se va echilibra. Faptul că suntem asigurați de existența soluției ne asigură că într-un număr finit de aplicări a acestei optimizări vom îndeplini condiția .

Ca o observație, algoritmul de echilibrare funcționeaza similar cu algoritmul ungar de determinare a cuplajelor perfecte în grafuri bipartite. Totuși datorită dimensiunilor mici ale matricei algoritmul mai puțin eficient descris mai sus va fi suficient.